線型代数集中講義
第二回

Matthew J. Holland

matthew-h@is.naist.jp

Mathematical Informatics Lab
Graduate School of Information Science, NAIST

Some useful references

- Introduction to linear maps: Axler (1997, Ch. 3)
- Metric space of linear maps: Rudin (1976, Ch. 9)
- Excellent review of matrix basics: Horn and Johnson (1985, Ch. 0)
- Very accessible matrix algebra; basic identities, inequalities: Magnus and Neudecker (1999, Ch. 1–3,11)
- Invariant quantities: Axler (1997, Ch. 10) (note high dependency on previous chapters)

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. 写像と潜在空間の構造
3. 行列の果たす役割

講義内容

1. <u>線型写像とその集まり</u>
2. 写像と潜在空間の構造
3. 行列の果たす役割

線型性：集合から関数へ

今回の議論は共通の体 $\mathbb{F}$($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) 上の線型空間 U, V, W が舞台となる.

視点は線型性を有する集合から，それに相当する関数の性質へと遷移.

Defn. $T : U \to W$ が以下の条件を充たすとき，**線型写像 (linear map)** という．$\forall\, u, u' \in U, \alpha \in \mathbb{F}$,

$$
\begin{aligned}
T(u + u') &= T(u) + T(u') \\
T(\alpha u) &= \alpha T(u)
\end{aligned}
$$

(*) 名付けは自然．T は任意の $u_1, \ldots, u_m \in U$ の線型結合をそれぞれの写像 $T(u_1), \ldots, T(u_m)$ の線型結合に写像する.

線型性：集合から関数へ

表記の追加.

$\mathcal{L}(U, W)$ で U から W への線型写像の全体を表す．つまり,

$$\mathcal{L}(U, W) := \{T : U \to W; T \text{ is linear}\}.$$

特異的に $T \in \mathcal{L}(U, U)$ の場合，T を U 上の**線型作用素 (linear operator)** という.
簡略化のため，$\mathcal{L}(U) := \mathcal{L}(U, U)$ と記す.

線型代数のもっとも重要な結果はほぼ例外なく線型作用素に限定したものである.

線型写像と基底

線型写像の定義域・余域それぞれの基底は中心的な役割を果たす．
$B_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ を U の基底とする．

Example. (*) U 上の線型写像は，B_U の元をどこに写像するかで定まる．換言すれば，$S, T \in \mathcal{L}(U, W)$ を取ると

$$S(u_i) = T(u_i), i = 1, \ldots, m \iff S = T.$$

Example. (*) 同様に，m 個のベクトル $w_1, \ldots, w_m \in W$ を取り，$T(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, m$ を充たす $T \in \mathcal{L}(U, W)$ は唯一つ存在し，以下のように定まる．

$$T(u) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m, \ \forall u \in U$$

where $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$.

種々の線型写像

(*) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ について，$S(x) := Ax$ と定める写像は
$S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(*) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の多項式 (次数は任意) の全体とすると，以下が成立する．

$$T(p) := \int_a^b p(x)\,dx \text{ は } T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \text{ を充たす}$$
$$T(p) := p''(\cdot) \text{ は } T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R})) \text{ を充たす}$$

(*) 反例：$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ について，$S(x) := Ax + m, m \neq 0$ と定める写像は非線形，すなわち $S \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(*) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ と任意の置換 π を取り，
$T(x) := (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ と定める写像は $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$.

(*) $(Tp)(x) := \beta x^3 p(x)$ と定める T($\beta \in \mathbb{R}$ を固定) は
$T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

更なる種々の線型写像

(*) 1 次元線型空間上の線型作用素はすべてスカラー倍である.

(*) 線型性の定義における加法性は冗長でないことを示せ. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ だが $T \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ という $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の事例を見つければ十分.

(*) 線型写像の拡張. 部分空間 $U \subset V$ をおいて, $T \in \mathcal{L}(U, W)$ を取る. $\overline{T}(u) = T(u), \forall\, u \in U$ を充たす $\overline{T} \in \mathcal{L}(V, W)$ の事例を示せ.

線型写像の集まり

線型空間は実にさまざまな形をとる．
普通の演算を用いると，$\mathcal{L}(U,V)$ 自体もその事例の一つに数えられる．

Example. (*) $\mathbb{F}$ 上の線型空間 U,V でにおいて，$S,T \in \mathcal{L}(U,V)$ に対してベクトル加法とスカラー倍の演算を以下のように定める．

$$(\alpha T)(\cdot) := \alpha T(\cdot),\ \forall\,\alpha \in \mathbb{F}$$
$$(T+S)(\cdot) := T(\cdot) + S(\cdot)$$

特に第一回の VM.5 を思い出しながら，加法単位・逆元が何になるか考えて，$\mathcal{L}(U,V)$ が $\mathbb{F}$ 上の線型空間である．

(*) $\mathbb{F}$ が $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ ならば，作用素ノルムといわれる

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|T(x)\|_2$$

が $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ において，正当なノルムを成す．

$\dim \mathcal{L}(U,V)$ **はいくつだろうか？　道具を何個か揃えよう．**

写像の合成による「積」

乗法に準ずる二値演算は $\mathcal{L}(U,V)$ と $\mathcal{L}(V,W)$ の要素を入力として自然と定義できる.

Defn. $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $S \in \mathcal{L}(V,W)$ に対して，その**積 (product)**ST を以下の合成写像で定める.

$$(ST)(u) := S(T(u)),\ \forall\, u \in U.$$

(*) 嬉しく，$ST \in \mathcal{L}(U,W)$.

(*) 容易に $m \geq 2$ 値以上の演算に拡張可能，すなわち
$T_1 \in \mathcal{L}(V_0,V_1), T_2 \in \mathcal{L}(V_1,V_2), \ldots, T_m \in \mathcal{L}(V_{m-1},V_m)$.

(*) この積は体で見る「正当」な乗法にかなり近い：

- 体の結合法則 (FM.3) に相当する性質がこの積にもある.
- この演算の単位元は常に存在する．つまり，$IT = T, \forall\, T \in \mathcal{L}(U,V)$ を充たす $I \in \mathcal{L}(V,W)$ があり，逆のケースも然り.
- 可換性は必ずしも成り立たず，ST が TS に等しいとは限ら

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. 写像と潜在空間の構造
3. 行列の果たす役割

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. <u>写像と潜在空間の構造</u>
3. 行列の果たす役割

写像に由来する空間の構造

$T \in \mathcal{L}(U,V)$ により，U,V の構造についてさらに深く考察できる．

Defn. T の**零空間 (nullspace)** もしくは**核 (kernel)** と**像 (range, image)** はそれぞれ以下のように定める．

$$\operatorname{null} T := \{u \in U : Tu = 0\}$$
$$\operatorname{range} T := T(U) := \{v \in V : Tu = v, u \in U\}$$

予告した構造はここで容易に見えてくる．

(*) $\operatorname{null} T$ と $\operatorname{range} T$ はそれぞれ U と V の部分空間である．

(*) $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ を一階微分の演算とする．$\operatorname{null} D$ を求めよ．

(*) 同じ D だが，ここで $0 < k$ 次までの多項式の全体 $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ における $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_k(\mathbb{R}))$ を考える．$\operatorname{range} D$ を求めよ．

写像に由来する空間の構造

$T \in \mathcal{L}(U, V)$ をめぐる基本的な結果は以下のとおりである．

Thm. (**) 線型空間 U が $\dim U < \infty$ とする．このとき，$\dim \operatorname{range} T < \infty$ が成り立ち，また

$$\dim U = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T.$$

学部の定番である G. Strang 先生の「基本定理」を大幅に拡張したものと捉えられる (以下の例で考察).

Example. (*) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を取る．$T(x) := Ax, S(x) := A^T y$ と定めると，

$$\operatorname{range} T = \operatorname{col} A = \operatorname{row} A^T, \quad \operatorname{range} S = \operatorname{col} A^T = \operatorname{row} A$$

が成立し，また核が通常の行列の核と一致する．あとは行の基本変形でつくる被約階段行列上で行空間が不変という事実．階数は $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{range} T$.

部分空間に符号化された写像の情報

写像をめぐる基本的な概念.

Defn. 写像 $T : U \to V$ が以下の性質,

$$u \neq u' \implies T(u) \neq T(u')$$

をもつならば, T を**単射 (injective)** という. また, $\operatorname{range} T = V$ ならば**全射 (surjective)** という.

両方の性質をもつ写像 T を **(全単射)bijective**, もしくは U **から** V **の上への一対一写像 (one-to-one mapping from** U **onto** V**)** という.

(*) $T \in \mathcal{L}(U, V)$ が単射で, $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset U$ が (線型) 独立ならば, $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\} \subset V$ も独立. 単射でない場合はどうか.

(*) 同様に, $[\{u_1, \ldots, u_k\}] = U$ が成り立ち, T が全射であれば, $[\{T(u_1), \ldots, T(u_k)\}] = V$. 全射でない場合はどうか.

部分空間に符号化された写像の情報

線型空間の構造をめぐる結果は，これらの写像の性質を論じる上で有用である．

任意の $T \in \mathcal{L}(U, V)$ を取る．

(*) T が単射 $\iff \operatorname{null} T = \{0\}$.
(*) したがって $\dim U = \dim \operatorname{range} T$ が単射性の必要十分条件である．
(*) $\dim U > \dim V$ ならば，T は単射でない．
(*) $\dim U < \dim V$ ならば, T は全射でない．
(*) したがって $\exists$ surjective $T \in \mathcal{L}(U, V) \iff \dim V \leq \dim U$.

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ とする．一般化した連立方程式について容易に議論できるようになった：

(*) $x \in \mathbb{F}^n, b \in \mathbb{F}^m$ として，m と n の如何によって，方程式 $T(x) = 0$ と $T(x) = b$ の解の存在と一意性について何がいえるか．

線型写像の可逆性

Defn. $T \in \mathcal{L}(U, V)$ が**可逆 (invertible)** であるとは，以下を充たす $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$ が存在することをいう．

$$T^{-1}T = I \in \mathcal{L}(U)$$

$$TT^{-1} = I \in \mathcal{L}(V)$$

ここで I はそれぞれの空間における恒等写像を表す．
注意：T^{-1} の線型性を条件としている．

(*) T^{-1} の表記を正当化せよ．逆写像が存在するならば一意に定まる．

(*) 下記の事実は確認すべきであろう．

$$T \text{ is invertible} \iff T \text{ is bijective}$$

$\Longleftarrow$ 方向を示すには，逆写像の線型性を示すことが要．

同型写像の基本的な結果

Defn. $T \in \mathcal{L}(U, V)$ が可逆ならば，U と V が**同型 (isomorphic)** であるという．

(*) 同型な U, V について，以下が成り立つ．

$$\dim U < \infty \iff \dim V < \infty$$

(*) また，$\dim U, \dim V < \infty$ とする．そのとき，

$$U \text{ and } V \text{ isomorphic} \iff \dim U = \dim V.$$

きわめて重要．上記の結果により，任意の有限次元空間をふたつ取り，その次元数さえ一致すれば，それらを結ぶ全単射な写像が必ず存在する．

線型作用素に焦点を当てる

線型作用素，すなわち $T \in \mathcal{L}(U)$ に着眼すると，ものごとが楽になる．

(*) $\dim U < \infty$ とすれば，以下はみな同値である．

(1) T は可逆である．
(2) T は単射である．
(3) T は全射である．

有限次元の仮定は必要：
(*) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ を $(Tp)(x) := 5x^3 p(x)$ で定める．単射であっても全射とは限らない．

(*) $\mathbb{F}$ 上の U で，$\dim U < \infty$，また $S, T \in \mathcal{L}(U)$ とすると，

$$ST \text{ 可逆} \iff S, T \text{ それぞれ可逆}$$

$$ST = I \iff TS = I$$

$$T = \alpha I, \text{ある} \alpha \in \mathbb{F} \iff ST = TS, \forall\, S \in \mathcal{L}(U)$$

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. <u>写像と潜在空間の構造</u>
3. 行列の果たす役割

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. 写像と潜在空間の構造
3. <u>行列の果たす役割</u>

体の要素の配列としての行列

Defn. 体 $\mathbb{F}$ 上の $m \times n$ **行列 (matrix)**B は以下のように

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad b_{ij} \in \mathbb{F}$$

単なる要素の配列として取り扱うことができる．少し発展させると，お馴染みの加法・乗法の演算は定義できる．

$[b_{ij}] := B$. b_i と $b_{(j)}$ で i, j 番目の行, 列ベクトルを表す.
次の事実を思い出そう．$B, B' \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{F}^{n \times l}$, $x \in \mathbb{F}^n$, $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} B + B' &= [b_{ij} + b'_{ij}] \\ \alpha B &= [\alpha b_{ij}] \\ Bx &= x_1 b_{(1)} + \cdots + x_n b_{(n)} = (b_1^T x, \ldots, b_m^T x) \\ BC &= \begin{bmatrix} Bc_{(1)} & \cdots & Bc_{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^T C \\ \vdots \\ b_m^T C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

多面的な行列

行列にはさまざまな興味深い側面がある．ここで特に関心があるのは以下の 2 点.

- **線型写像としての行列**
- **一般の線型写像の表現としての行列**

前者は単純
$B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ が写像 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ を定めることは確認済み．行列に特化した (不) 等式が無数にあり，有用なものも多いので専門書を参照されたい．(Magnus and Neudecker, 1999).

後者は少しだけ入り組んだ
同一の線型写像が定める行列の同値類 (equivalence classes) は構築できる．一見して違うように見える行列が自然な同値性をもちうることが基本的な発想.

ベクトルや写像の表現行列

$T \in \mathcal{L}(U, V)$，$\dim U, \dim V < \infty$ とする．基底 $B_U := \{u_1, \dots, u_n\}, B_V := \{v_1, \dots, v_m\}$ をおく．

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m, \quad 1 \leq j \leq n$$

と展開すると，これらのスカラー a_{ij} が T を定めることが明らかである．

Defn. かくて，以下のように T の**表現行列 (matrix representation)** を定める．

$$M(T; B_U, B_V) := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$U = V$ の場合，$M(T; B_U) := M(T; B_U, B_U)$ と略して表記する．

(*) 基底を固定したとき，写像 $T \mapsto M(T) \in \mathbb{F}^{m \times n}$ が全単射である．

ベクトルや写像の表現行列

$T \in \mathcal{L}(U, V), S \in \mathcal{L}(V, W)$ とおく．基底 B_U, B_V, B_W を固定.

(*) この表現は自然な性質をもつ．特に，表現の積が積の表現に一致する：

$$M(ST; B_U, B_W) = M(S; B_V, B_W)M(T; B_U, B_V)$$

写像のみならず，以下のように線型空間の元であるベクトル $u \in U$ に表現行列の範囲を拡げることができる.

$$M(u; B_U) := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ここで $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ が基底 B_U による展開.
(*) このとき，嬉しいことに

$$M(T(u); B_V) = M(T; B_U, B_V)M(u; B_U).$$

更なる $T \mapsto M(T)$ の性質

(*) $\mathbb{F}^{m\times n}$ は正当な線型空間である．$\dim \mathbb{F}^{m\times n}$ を求めよ．

(*) 続いて，体 $\mathbb{F}$ 上の U, V において，固定した基底をもって $T \mapsto M(T; B_U, B_V)$ と定まる M を取る．このとき，線型性は確認できる，つまり

$$M \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(U, V), \mathbb{F}^{m\times n})$$

が成り立ち，また M は可逆である．

(*) この結果を使って以下は証明できる．

$$\dim \mathcal{L}(U, V) = \dim(U) \dim(V).$$

(*) さらに，$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ と，普通の基底でもって得る $M(T) = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ について，

$$T(x) = M(T)x = x_1 c_{(1)} + \cdots + x_1 c_{(n)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{F}^n.$$

ベクトルや写像の表現行列

この表現行列はなぜ有用なのだろうか． 基底さえおけば,

$T(u) = v \in V$ も $M(T(u)) = M(T)M(u)$ もほぼ同様に扱える．

前者はによってかなり抽象的になる (u, v が関数になるときなど).
後者は具体性があって取扱い安い ($\mathbb{F}$ は通常 $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ とするのが大きい).

この発想は線型代数においてきわめて重要である．

なぜなら，空間の対 U, V と U', V' がまったく違っても，それらの上で定義される写像 $\mathcal{L}(U, V)$ と $\mathcal{L}(U', V')$ は密接に結びついているからである．

この接点を明確に具現化しているのは，表現行列にほかならない．

相異なる空間同士の接点

Example. (*) $\beta \in \mathbb{C}$ として，以下のように定まる写像
$T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{C}), \mathcal{P}_{m+2}(\mathbb{C}))$ と $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+2})$ を考える．

$$\begin{aligned}(Tp)(x) &:= \beta x^2 p(x),\ p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C}) \\ S(u) &:= (0, 0, \beta u_1, \ldots, \beta u_m),\ u \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

それぞれ「普通の基底」について，以下が成り立つことを確認せよ．

$$M(T) = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \beta & 0 & & \\ 0 & \beta & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \beta \end{bmatrix},$$

上記は $(m+2) \times m$ の複素行列．

線型代数が答えようとする疑問

次の問いかけは線型代数の本質的な意義と目的に触れる.

$T \in \mathcal{L}(U, V)$ として，以下の表現行列もおく.

$$A := M(T; B_U, B_V)$$
$$A' := M(T; B'_U, B'_V).$$

A や A' から，T についてどのような情報が読み取れる (復号化できる) か？

この情報は A と A' の間で整合しているか？

表現行列から写像の情報を読み取る

Defn. V を $\mathbb{F}$ 上の n 次元線型空間とする． $G \in \mathbb{F}^{n\times n}$ を取り，基底 $B_1 = \{b_1, \ldots, b_n\}, B_2 = \{b_1', \ldots, b_n'\}$ が存在し，以下の

$$G = M(I; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} M(b_1; B_2) & \cdots & M(b_n; B_2), \end{bmatrix}$$

を充たす場合，G を V 上の B_1 から B_2 への**基底変換行列 (change-of-basis matrix)** という．
このとき，$G_{1,2} := G$ と明記する．

(*) $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ が可逆ならば，A は基底変換行列である．

(*) 逆も然り．任意の基底変換行列は可逆である．
$I = M(I^2; B, B) = M(I; B, B')M(I; B', B)$ を使えば容易に確認できる．

上記で述べた結果はきわめて重要であり，次に紹介する概念に直結する．

表現行列から写像の情報を読み取る

(*) $G_{1,2}$ が V 上の B_1 から B_2 への変換行列ならば,

$$G_{1,2}^{-1} = G_{2,1}.$$

(*) これを使うと，以下は確認できる.

$$M(T; B_1) = G_{2,1} M(T; B_2) G_{1,2}.$$

Defn. 以下を充たす変換行列 G が存在すれば，二つの正方行列 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ を**相似 (similar)** といい，$A \sim B$ と表す.

$$A = G^{-1} B G.$$

(*) 相似性 "$\sim$" は同値関係を成す (反射，対称，推移の三律は要確認).

表現行列から写像の情報を読み取る

特異的に，作用素 $T \in \mathcal{L}(U)$ に着目すると，

$$M(T; B) \sim M(T; B')$$

が任意の基底 B, B' について成立する．

(*) したがって，$A = M(T; B_1)$ かつ $\overline{A} \sim A$ と知っていれば，必ず基底 B_2 が存在し，

$$\overline{A} = M(T; B_2).$$

予告したとおり，「$M(T; B_1)$ と相似な行列」の全体を「潜在する T を表現する行列」と容易に捉えられる．

表現行列から写像の情報を読み取る

相似な行列 $A \sim A'$ が多くの「不変量」をもつことがよく知られる．少し先走りすると，以下のようなものが代表的.

- $\det A = \det A'$
- $\operatorname{trace} A = \operatorname{trace} A'$
- A と A' が固有値を共有する
- A と A' が特性多項式を共有する
- 有用な標準型 (疎な相似形式) を同じくする

これらの事実を使うと，相異なる二つの行列について，色々と要領よく情報を得ることはできる．

が，これらは行列の量であり，明示的には潜在する T に触れていない

果たして T 固有の性質だけで，同等な不変量は定義できるのか？

答えは *yes* である．次回の講義の後半で丁寧に考察する．

より一般的な議論における難点

これまで紹介した重要な概念 (特に基底変換と相似性など) は線型作用素 $T \in \mathcal{L}(U)$ とそれが生成する正方行列 $M(T; B)$ を対象にしていた．おいてきた仮定について，最後に少し触れることにする．

ほとんどすべて関心のある結果は作用素 $T \in \mathcal{L}(U, U) = \mathcal{L}(U)$ をめぐるものである．

しかし，これは U の基底 B, B' でもって $M(T; B, B')$ が正方であることを意味するとはいえ，それだけでは不十分．基底変換行列を唯一の例外として，我々は $M(T; B, B)$ という形をとる表現行列のみに興味がある．

その理由は次の例で明らかになると思われる．

より一般的な議論における難点

Example. (*) $T \in \mathcal{L}(U)$ とその $n \times n$ 表現行列

$$M(T; B_1, B_2) = [a_{ij}],$$

を取り， また A' を，k 番目の行以外は A と同じものにして，例外の行を

$$a'_k := a_k + \lambda a_l,$$

つまり，A の行の基本変形で得られる行列． 以下を充たす基底 B'_2 を見つけよ．

$$A' = M(T; B_1, B'_2).$$

しかし，trace や det は明らかに基本変形に対して不変ではないので，前後の基底が異なる表現行列は考察の対象にはならない．

(*) ただし，階数は少しおもしろい． 基本変形 (相似性は保持されない) に対して不変であるし，また相似な行列は階数を同じくする． すなわち $A \sim A' \implies \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A'$.

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. 写像と潜在空間の構造
3. **行列の果たす役割**

講義内容

1. 線型写像とその集まり
2. 写像と潜在空間の構造
3. 行列の果たす役割

References

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2nd edition.

Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1st edition.

Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1999). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. Wiley, 3rd edition.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition.