線型代数集中講義
第三回

Matthew J. Holland

matthew-h@is.naist.jp

Mathematical Informatics Lab
Graduate School of Information Science, NAIST

Some useful references

- Polynomial basics: Axler (1997, Ch. 4)
- Eigenvalue/vector basics: Axler (1997, Ch. 5,10), Horn and Johnson (1985, Ch. 1)
- More advanced results: Axler (1997, Ch. 8-9)

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. やや入り組んだ話題

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. やや入り組んだ話題

重要な着想，其の一．作用素の冪乗

線型作用素には，一般の線型写像のもたない良い性質がある．

例示：$U \neq V$ として $S \in \mathcal{L}(U, V)$ を取ると，

$$S(u) \in V, S(S(u)) \text{ は当然，定義されていない．}$$

よって擬似の積 SS は無意味である．

(*) しかし，作用素 $T \in \mathcal{L}(U)$ となると，

$$T^m(u) := \underbrace{(T \cdots T)}_{m\text{-product}}(u)$$

はきちんと定まり，もちろん $T^m \in \mathcal{L}(U)$ も成立する．

重要な着想，其の二．集合の不変性

Defn. $T \in \mathcal{L}(U)$ を取って，部分集合 $E \subset U$ が T-**不変 (invariant under** T**)** であるとは，以下のことをいう．

$$T(w) \in E, \forall\, w \in E.$$

無論，T-不変な $E \subset V$ では，任意の $w \in E$ は以下を充たす．

$$T^m(w) \in E,\ m > 0.$$

したがって T によって生成される「動的な振る舞い」について論じることはごく自然．つまり，

$$w_{(k)} := T^k(w),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

の成り行きに着目するのである ($T^0 := I$).

Comment. これらの概念はエルゴード理論の中枢に根づく：

$$\{\text{エルゴード理論}\} \approx \{\text{動的系}\} \cap \{\text{測度論 (特に確率)}\}.$$

いくつかの事例

Example. (*) 任意の $T \in \mathcal{L}(U)$ を取る.

- U と $\{0\}$ は T-不変である.
- $\operatorname{range} T$ も $\operatorname{null} T$ も T-不変.

(*) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_k(\mathbb{R}))$ を $(Tp)(\cdot) := p'(\cdot)$ と定める．すると $\mathcal{P}_l(\mathbb{R})$ はあらゆる $l \leq k$ に対して T-不変である.

(*) 部分空間 $W \subset U$ が T 不変で，また $\dim W = 1$ とする．このとき，$w_0 \in W$ が存在し，

$$T(w_0) = \alpha w_0.$$

この等式は次のネタを予言している.

作用素の固有値と固有ベクトル

線型空間の要素のなかでも，作用素を経てもとのベクトルのスカラー倍に写像される要素はその関数自体について多くの情報を含む．

体 $\mathbb{F}$($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) 上の線型空間 U を考える．$\dim U < \infty$ とする．

Defn. $T \in \mathcal{L}(U)$ について，ある $\alpha \in \mathbb{F}$ が

$$Tu = \alpha u$$

を $u \neq 0$ に対して充たすとき，α を T の**固有値 (eigenvalue)** という．
$\sigma(T) := \{\alpha \in \mathbb{F} : \alpha \text{ an eigenvalue of } T\}$ を T の**スペクトル (spectrum)** という．

$\alpha \in \sigma(T)$ について，$Tv = \alpha v$ ならば，v を α に対する**固有ベクトル (eigenvector)** という．

作用素の固有値と固有ベクトル

固有ベクトルから出発すれば，先ほどの T ダイナミクスは至ってシンプル：

$$T^m(u) = \alpha^m u$$

となって，固有値 α さえ知っていれば十分である．

基本的な性質等々 1

(*) $\alpha \in \sigma(T)$ に対する固有ベクトル u について，当然 βu も同様に α に対する固有ベクトルである ($\beta \in \mathbb{F}$ は任意).

(*) 先ほどの不変空間に関する考察を少し深めると，

$$\exists W \subset U, \dim W = 1, T\text{-invariant} \iff T \text{ has an eigenvalue},$$

が確認でき，良い特徴づけが得られる.

(*) 有用な結果として，

$$\alpha \in \sigma(T) \iff (T - \alpha I) \in \mathcal{L}(U) \text{ が非可逆である}$$

が成り立つ．右辺を非単射，非全射に置き換えても同様.

(*) したがって，$\alpha \in \sigma(T)$ を取って，

αに属する T の固有ベクトルの全体は U の部分空間である.

基本的な性質等々 2

固有値が異なることには，特に意味があるのだろうか？

(**) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \sigma(T)$ を相異なる固有値，すなわち $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$ とする．これらに対する非ゼロ固有ベクトル $u_1, \ldots, u_m$ を取る． そのとき，

$$\{u_1, \ldots, u_m\} \text{ は線型独立である．}$$

(*) よって，$T \in \mathcal{L}(U)$ の相異なる最大の固有値の数は空間の次元に制限され，具体的に $|\sigma(T)| \leq \dim U$.

このように簡単な性質を確かめていくうちに，自然が疑問がいくつか思い浮かぶ…

講義内容

1. <u>不変部分空間と固有値，固有ベクトル</u>
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. やや入り組んだ話題

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. <u>議論を導く疑問，理論の礎をなす結果</u>
3. やや入り組んだ話題

我々の理論構築を促す問いかけ

$T \in \mathcal{L}(U)$, $\dim U < \infty$ を考える.

T が固有値をもつ条件とは何か？

T の相異なる固有値はいくつあるか？

スペクトル $\sigma(T)$ から T について
どのような情報が読み取れるか？

T のスペクトル的情報は
その任意の表現行列にも共通するのか？

この講義で，各疑問に (ある程度) 答えられるように議論を進めていく.

作用素の多項式をつくる

$T \in \mathcal{L}(U)$ とおく．$T^m := T \cdots T$ ($0 < m$ 個) の定義を思い出し，$T^0 := I$ とする．また T が可逆ならば以下も定めておく．

$$T^{-m} := (T^{-1})^m.$$

(*) すると，$m, n \geq 0$ に対して下記の等式が成立．

$$T^{m+n} = T^m T^n, \quad (T^m)^n = T^{mn}.$$

次に，関数 $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$，すなわち $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ の元を取ると，その形式が以下のとおり．

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m.$$

Defn. $T \in \mathcal{L}(U)$ について，任意の $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ に対して次の写像を定義する．

$$p(T) := a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m.$$

(*) $p(T) \in \mathcal{L}(U)$ は明らかである．

作用素の多項式：その性質

有用な理由：$p(T)$ と p はまったく同様に分解可能！

(*) この事実を確認する．もちろん，$p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ を取ると

$$(pq)(T) = p(T)q(T).$$

(*) さらに $q(T)p(T) = p(T)q(T)$ が得られる．

Example. 複素多項式の性質により，$p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ について，$c \neq 0$ が存在し，以下のように分解できる．

$$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$$

λ_i が p の重複度 1 以上の根． $q_i(z) := (z - \lambda_i), i = 1, \ldots, m$ および $q_0(z) := c$ と定めると，$p = q_0 q_1 \cdots q_m$ が成り立つ． したがって，

$$\begin{aligned} a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m &= p(T) \\ &= (q_0 q_1 \cdots q_m)(T) \\ &= q_0(T) \cdots q_m(T) \\ &= c(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I). \end{aligned}$$

固有値の存在

先ほど列挙した一つ目の問いに部分的には答える.

(**) $\mathbb{C}$ 上の有限次元 U では，任意の $T \in \mathcal{L}(U)$ は

$$\sigma(T) \neq \emptyset$$

を充たす．すなわち，すべての複素線型作用素は固有値をもつ.

(*) したがって，複素線型空間 U における作用素 T を取ると，以下を充たす基底 B が存在する.

$$M(T;B) = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ 0 & * & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

この結果はのちほど触れるテーマに直結する.

Remark. 行列式は一度も使っていない (定義すら述べていない) に注意.

スペクトルから読み取る作用素の性質

固有値の含む情報が表現行列にも共通かどうかは容易に確認できる.

(*) $T \in \mathcal{L}(U)$ と基底 B を取る. そのとき,

$$\alpha \in \sigma(T) \iff \alpha \in \sigma(M(T;B)),$$

すなわち T の固有値は任意の表現行列の固有値と一致する.

単純 (=疎) な表現行列と不変部分集合 1

$M(T;B)$ に T の情報が符号化されていることは確認済み．
そのなかでも特に「復号化」しやすいものに着目する．

目標： $M(T;B)$ がなるべく「単純」になるように B を賢く選びたい．

これが可能かどうかは，T のどの性質に依存するのだろうか．

Defn. $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ が $a_{ij} = 0, \forall i > j$ を充たすとき，A を**上三角 (upper-triangular)** という．

(*) $T \in \mathcal{L}(U)$ と基底 $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ を取る．以下は同値である．

- A $M(T;B)$ は上三角行列．
- B $T(u_j) \in [\{u_1, \ldots, u_j\}],\ \ j = 1, \ldots, n$.
- C $[\{u_1, \ldots, u_j\}]$ は T-不変，$j = 1, \ldots, n$.

(*) T に上三角表現ができるならば，$\sigma(T)$ は非空．

単純 (=疎) な表現行列と不変部分集合 2

上三角表現は恒等的に存在するのだろうか？
$\mathbb{C}$ 上の空間 U に限定すれば，常に存在する.

(**) 任意の $T \in \mathcal{L}(U)$ に対して，以下を充たす基底 B が存在する.

$$M(T; B) \text{ は上三角行列.}$$

証明について，$\sigma(T)$ が非空であることを使って，U の次元に帰納法を適用すれば議論が難なく進む.

(*) $T \in \mathcal{L}(U)$ の行列 $A := M(T; B)$ が上三角とする．そのとき，

$$T \text{ は可逆である} \iff a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n.$$

嬉しいことに，A から瞬時に T の可逆性が読み取れる.
双方に対偶を使った証明は円滑に展開できる.

単純 (=疎) な表現行列と不変部分集合 3

さらに，作用素の固有値も楽々と上三角表現から読み取れる．

(*) $T \in \mathcal{L}(U)$ を取って $\dim U = n$ とする．$A := M(T; B)$ が上三角となる B を取る．そのとき，

$$\sigma(T) = \{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}.$$

任意の $\alpha \in \sigma(T)$ を取って $M(T - \alpha I; B)$ を調べると容易に確認できる．

Defn. さらに単純な表現として，$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ を充たす**対角 (diagonal)** 表現行列 A は特に都合が良い．

(*) $T \in \mathcal{L}(U)$ と $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ について，次の特徴づけは確認できる．

$$M(T; B) \text{ が対角である} \iff \text{各 } u_i \text{が } T \text{ の固有ベクトル}$$

単純 (=疎) な表現行列と不変部分集合 4

「対角化できる」は「三角化できる」より遥に強い条件である．

Example. (*) $T(z) := (z_2, 0)$ と定める $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考える．まず 0 が $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ の唯一の固有値であることを確認．また，

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0\}$$

は T の固有ベクトルの全体そのもの．したがって，T には対角表現がない．

そのゆえ，$\mathbb{C}$ の上でも，対角化できるとは限らない．

更なる悲報：$\mathbb{R}$ だと，三角化すら保障できない...

対角化の可能性を特徴づける

(*) これまでの結果を使って，$T \in \mathcal{L}(U)$ を取って $\dim U = n$ とおくと，

$$|\sigma(T)| = n \implies M(T;B) \text{ が対角となる } B \text{ は存在する}$$

ただし，この (十分) 条件は強すぎて，必要ではない．

(**) $\dim U = n$ とおいて，相異なる固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \sigma(T), 0 \leq m \leq n$ と表す．以下はすべて同値．

- A $M(T;B)$ が対角行列となる B が存在．
- B $\exists B = (u_1, \ldots, u_n)$，各 u_i が T の固有ベクトル．
- C T-不変性，$\dim U_i = 1$，また $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ を充たす部分空間 $U_1, \ldots, U_n$ が存在．
- D $U = \mathrm{null}(T - \alpha_1 I) \oplus \cdots \oplus \mathrm{null}(T - \alpha_m I)$
- E $\dim U = \dim \mathrm{null}(T - \alpha_1 I) + \cdots + \dim \mathrm{null}(T - \alpha_m I)$

もちろん，上記の場合でもすべての固有値が互いに異なる必要はない．

実線型空間における固有値の存在 1

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ と限定すると，話がいささか厄介になる．
(*) $\mathbb{R}$ 上の U で $T \in \mathcal{L}(U)$ を取る．$\sigma(T)$ が空である場合，

$$\Longrightarrow \ \dim W = 1 \text{ で } T\text{-不変な } W \subset U \text{ は存在しない．}$$

難しくなる原因は，実係数多項式の根の存在にかかわる．

(*) 思い出そう．$p(x) := x^2 + ax + b$ と定める多項式 ($a, b \in \mathbb{R}$) について，

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \iff a^2 \geq 4b.$$

(**) 非定値な $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ について，以下の分解が一意に定まる．

$$p(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)(x^2 + a_1 x + b_1) \cdots (x^2 + a_M x + b_M).$$

ここで $m, M \geq 0$，また $c, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$，$a_i^2 < 4b_i$.

実線型空間における固有値の存在 2

先述の事実を使って，この重要なケースについて考察する．

$\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}$ へと視点を移すと，不変部分空間の存在をめぐる結果はやむを得ず弱くなる．

(**) $\mathbb{R}$ 上で U，$1 \leq \dim U = n$ とおく．そのとき，以下を充たす $W \subset U$ は存在する．

$$W \text{ が } T\text{-不変で}, 1 \leq \dim W \leq 2.$$

難点：不変部分空間があっても固有値は存在するとは限らない．

実線型空間における固有値の存在 3

理想の状況ではないが，せめて以下のことは保障できる．

(**) $\mathbb{R}$ 上の線型空間 U を考える．

$$\dim U \text{ が奇数} \implies \forall\, T \in \mathcal{L}(U),\ \sigma(T) \neq \emptyset.$$

$\dim U = 1$ ならば自明である．これを帰納法の base case として議論は展開できる．

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. やや入り組んだ話題

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. <u>やや入り組んだ話題</u>

少し奥深い疑問に答える

まず，以前に掲げた問いかけ

「T の相異なる固有値はいくつあるか？」

にはまだ答えていない． さらに，関連する自然な疑問，たとえば

「三角化」と「対角化」の中間に位置する概念はあるか？

T 固有の情報だけで，有用な不変量は定義できるか？

にもある程度は答えたい．

多少の労力は要されるが，以降は上記の問いには答えていく．

一般固有ベクトル１

$T \in \mathcal{L}(U)$, $\dim U = n$ を取る．
$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を T の相異なる固有値とする．$m < n$ のときでも，

T が「十分な固有ベクトルを持ち合わせている」
(すなわち $\{u_1, \ldots, u_n\}$ が U の基底となる T の固有ベクトル
$u_1, \ldots, u_n$ が存在する)

$\Longrightarrow$ T はもっともは都合の良い線型写像である．

これを充たすには，$n \geq m$ 個の「固有空間」，すなわち

$$\mathrm{null}(T - \alpha_i I) = \{u \in U : Tu = \alpha_i u\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

の基底が U の基底をなす必要がある．

一般には，線型独立な固有ベクトルが足りず，対角化ができなく
なり，理想の空間分解などができない．

一般固有ベクトル 2

この状況下でも同様な構造結果などを求めるなら，次の一般化が重要である．

Defn. $\alpha \in \mathbb{F}$ を固定．$u \in U$ について以下の等式,

$$(T - \alpha I)^k(u) = 0$$

を充たす整数 $k > 0$ が存在するとき，u を T の**一般化固有ベクトル (generalized eigenvector)** という．

(*) このときに $u \neq 0$ ならば，α は $\alpha \in \sigma(T)$，すなわち (通常の) 固有値．

Example. (*) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ を $T(z) := (z_1, 0, z_3)$ と定める．
$0, 1 \in \sigma(T)$ を示せ．$\alpha_1 := 0, \alpha_2 := 1$ とおくと，以下は成立．

$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{null}(T - \alpha_1 I)^2 \oplus \operatorname{null}(T - \alpha_2 I).$$

この例はのちほど見る重要な結果の予告でもある．

冪零作用素

Defn. $S \in \mathcal{L}(U)$ について，$S^k = 0$ となる整数 $k > 0$ が存在するとき，S を**冪零 (nilpotent)** という．

(*) U において，S を冪零線型作用素とする．そのとき，

$$\{0\} = \operatorname{null} S^0 \subset \operatorname{null} S \subset \operatorname{null} S^2 \subset \cdots,$$

が成り立ち，また $\operatorname{null} S^m = \operatorname{null} S^{m+1}$ となるような m が存在するなら，

$$\Longrightarrow \operatorname{null} S^m = \operatorname{null} S^l, \forall l \geq m.$$

(*) U が有限次元ならば，このような「極限」には必ず到達する．実際，

$$\operatorname{null} S^{\dim U} = \operatorname{null} S^{\dim U+1} = \cdots.$$

(*) さらに，この U において $S \in \mathcal{L}(U)$ を取ると，

$$S^{\dim U} = 0.$$

冪零作用素と一般化固有ベクトル

(*) 先ほどの諸性質を用いて，$\alpha \in \sigma(T)$ について

$$\mathrm{null}(T - \alpha I)^{\dim U} = \{\alpha\text{に属する } T \text{ の一般化固有ベクトル}\}.$$

が成り立つことは容易に確かめることができる．

次は上記の概念が度々出てくる重要な話題に入る．

重複度 1

$T \in \mathcal{L}(U)$ を取って，$\dim U = n$ とする． $A := M(T; B)$ が上三角になるように基底 B を選ぶ． このとき,

$$\sigma(T) = \{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$$

が成り立つ． したがって $|\sigma(T)| < n$ ならば，A の対角成分には重複する値がある.

$M(T; B)$ の対角成分の重複は
基底 B に依存するのか？

さらに，ある $\alpha \in \sigma(T)$ が何回 (いくつの対角成分に)
現れるか特徴づけられるか？

提案：α の重複度 = $\dim \operatorname{null}(T - \alpha I)$ ではないか？

重複度 2

Example. (*) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ が以下の表現行列をもつように定義する．

$$M(T) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ここで普通の基底でもって表現行列を生成．固有値 5 は 2 回出現する．

しかし，$\dim \operatorname{null}(T - 5I) = 1$ は確認できるので，提案は失敗．

Defn. ちなみに，α に属する先ほどの「固有空間」の次元が $\alpha \in \sigma(T)$ の**幾何重複度 (geometric multiplicity)** と呼ばれる．

重複度 3

改善が必要．次の重要な結果は正しい方向を示してくれる．

(**) $\mathbb{F}$ 上，$T \in \mathcal{L}(U)$ と $\alpha \in \sigma(T)$ を取る．$M(T;B)$ が上三角となるような基底 B について，

$$\alpha \text{ が } \dim \operatorname{null}(T-\alpha I)^{\dim U} \text{ 回だけ対角成分に出現する．}$$

Defn. したがって，「一般化固有空間」である $\operatorname{null}(T-\alpha I)^{\dim U}$ の次元を α の**代数的重複度 (algebraic multiplicity)** もしくは単に重複度と呼ぶ.

(*) $\mathbb{C}$ 上の U において，$T \in \mathcal{L}(U)$ を取る．相異なる固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$．それぞれの重複度を $d_1, \ldots, d_m$ と表すと，

$$d_1 + \cdots + d_m = \dim U.$$

無論，幾何重複度だとこのような結果は得られない．

(より直感的な) 特性多項式 1

重複度をめぐる先ほどの議論は，線型作用素の「特性多項式」という重要な概念と密接な関係にある．

学部の線型代数では，$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ を取って，

$$\det(\alpha I - A)$$

を $\alpha \in \mathbb{F}$ の関数として考えることがしばしばある．

正方行列ならば議論はすんなりと進むが，現時点では課題が残っている：

- 一般の $T \in \mathcal{L}(U)$ に対しても定義できるか？
- 線型作用素版の $\det T$ はまだ定義していない
- **T 固有の性質を用いて特性多項式を定めたい (第二回から)**

(より直感的な) 特性多項式 2

課題を踏まえて，任意の T のスペクトル的情報をとらえる自然な多項式 q_T を考える．

Defn. $\mathbb{C}$ 上の U を考える．相異なる固有値 α_i(重複度 d_i)$i = 1, \ldots, m$ をもつ $T \in \mathcal{L}(U)$ を取る．T の**特性多項式 (characteristic polynomial)** q_T を次のように定める．

$$q_T(z) := (z - \alpha_1)^{d_1} \cdots (z - \alpha_m)^{d_m}.$$

重要：この概念は $\mathbb{C}$ 上の線型作用素に限定.

(*) $T \in \mathcal{L}(U)$ について，q_T の次数は $\dim U$．q_T の根は T の固有値にほかならない.

(**) 簡潔な議論により，

$$q_T(T) := (T - \alpha_1 I)^{d_1} \cdots (T - \alpha_m I)^{d_m} = 0$$

は示せる．この結果は $\mathbb{C}$ 上の Cayley-Hamilton 定理そのもの.

$\mathbb{R}$ 上の U の場合はどうだろうか?

打つ手はあるが，$\mathbb{R}$ 上での議論はいささか厄介.

上記と同様な結果は得られるが，$\mathbb{C}$ ほど簡潔な結果は望めない.

まず，「上三角化」ではなく，「区分的上三角化」で対応するしかない.

(**) $\mathbb{R}$ 上の U で $T \in \mathcal{L}(U)$ を取る．以下の表現行列を成す基底 B は存在する.

$$M(T; B) = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}$$

ここで各 A_i は高々 2×2 の実行列 (1×1 もありうる)．また，A_i が 2×2 ならば固有値は持たない.

最後の「固有値を持たない」性質は後ほど役に立つ.

$\mathbb{R}$ 上の重複度 1

次の結果を思い出そう．$\mathbb{C}$ 上の $T \in \mathcal{L}(U)$ について，

T の相異なる固有値の重複度の和 = $\dim U$ が成り立つ．

$\mathbb{R}$ だと，一般にはこのような結果は到底望めない ($\sigma(T) = \emptyset$ の場合など).

実際，固有値が存在しても，同様の結果が得られるとは限らない．

Example. (*) 普通の基底で以下の表現行列をもつ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ を考える．

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$1 \in \sigma(T)$ は明らかで，$(1,0,1)$ が固有ベクトルとなる．さらに，$\sigma(T) = \{1\}$ も確認できる．しかし，

$$\dim \operatorname{null}(T - I)^3 = 1 < \dim \mathbb{R}^3$$

となってしまう． 我々の議論はまだ不完全...

$\mathbb{R}$ 上の重複度 2

理論には空白がある．固有値を補完するために新たな概念を導入する必要がある．

$$M(T;B) = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix},$$

先ほど紹介したとおり，この「区分的上三角」形式はいつでもつくれる．

理論の空白を埋めるために，この 2×2 の区分行列が中心的な役割を果たす．

どうすれば良いか．
動機 (出発点)：まず q_T の定義を $\mathbb{R}$ へと拡張しよう．

$\mathbb{R}$ へ q_T を拡張しよう 1

$\mathbb{C}$ のとき，任意の $T \in \mathcal{L}(U)$ を取って

$$M(T;B) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

は常に得られる．α_i たちの (代数的) 重複度を利用して，
$q_T^{(i)}(z) := (z - \alpha_i)$ を成分として q_T を構築する：

$$q_T := q_T^{(1)} \cdots q_T^{(n)}$$

$\mathbb{R}$ では，以下の形式で我慢.

$$M(T;B) = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}.$$

もし $m = n$ で $A_i = [\alpha_i], i = 1, \ldots, n$ ならば元の q_T はそのまま使える.

$\mathbb{R}$ へ q_T を拡張しよう 2

しかし一般に，$m \leq n$ となって 2×2 区分行列 A_i を扱う必要が出てくる．

Heuristic として「Cayley-Hamilton が成り立つように」と心がける．
まず，$\dim U = 1$ の場合．$M(T; B) = [\alpha_1]$ は自明で，したがって

$$q_T(T) := q_T^{(1)}(T) := (T - \alpha_1 I) = 0.$$

(*) 次は $\dim U = 2$ の場合．$B = (u_1, u_2)$ とおく．そのとき，

$$M(T; B) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

ならば $(z - a)(z - d)$ を見るのは自然であろう．容易に

$$(T - aI)(T - dI)(u_i) = bcu_i, \quad i = 1, 2.$$

と確認できるので，$(T - aI)(T - dI) - bcI = 0$ が判明．良い方向が見えてきた．

$\mathbb{R}$ へ q_T を拡張しよう 3

特性多項式を拡張する道筋が見えつつある.
$\mathbb{R}$ 上の U で $M(T;B)$ の上三角区分行列を $A_i, i = 1, \ldots, m$ で表す.

$$q_T^{(i)}(z) := \begin{cases} (z-a) & \text{if } A_i = [a] \\ (z-a_{11})(z-a_{22}) - a_{21}a_{12} & \text{if } A_i \text{ is } 2 \times 2 \end{cases}$$

と「成分」を自然に定めると，前と同様に，$q_T := q_T^{(1)} \cdots q_T^{(m)}$ と拡張版の特性多項式を定義.

しかし,

A_i は基底に依存する．この新しい q_T の定義は妥当か？

確認する必要はあるが，妥当である.

重複度の空白を埋めるべく 1

まず，新しい q_T を構成する要素 $q_T^{(i)}(T)$(線型作用素の形式) は必ず

$(T-\alpha I)$ もしくは (T^2+aT+b) という形をとる．

(**) $M(T;B)$ が区分的上三角となるように U の基底 B を取る．
区分行列は $A_1,\ldots,A_m$ で表す．任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ について，

$$|\{j : A_j = [\alpha]\}| = \dim\operatorname{null}(T-\alpha I)^{\dim U}$$

が成り立つ．また $a^2<4b$ を充たす任意の対 $a,b\in\mathbb{R}$ について，

$$|\{j : q_T^{(j)}(z) = z^2+az+b\}| = \frac{\dim\operatorname{null}(T^2+aT+bI)^{\dim U}}{2}.$$

理論の空白を埋めるのは，後者の「固有対」(a,b) にほかならない．

重複度の空白を埋めるべく 2

先ほどの結果を丁寧に咀嚼して理解しよう.
$M(T;B)$ が区分的上三角 (区分行列 $A_1, \ldots, A_m$) となるように基底 B を取る.

「固有対」について:
(*) まず, 2×2 行列 A が固有値を持たない場合, $a^2 < 4b$ および以下の等式を充たす $a, b \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$x^2 + ax + b = (x - a_{11})(x - a_{22}) - a_{12}a_{21}.$$

(*) また, $a^2 < 4b$ ならば,

$$T^2 + aT + bI \text{ が単射的でない} \iff \dim \operatorname{null}(T^2 + aT + bI)^{\dim U} > 0.$$

かくて, ここで左辺を充たす任意の (a, b) を**固有対 (eigenpair)** という.

- (a, b) が固有対ならば, $q_T^{(j)}(z) = z^2 + az + b$ となるような A_j は必ず出現.
- 逆に, 各 2×2 行列 A_j について, $\dim \operatorname{null}(q_T^{(j)}(T))^{\dim U} \geq 2$ が成立.

重複度の空白を埋めるべく 3

固有値について:

- $\alpha \in \sigma(T)$ ならば，ある指数 j で $A_j = [\alpha]$ となる.
- 逆に，$A_j = [\alpha]$ ならば，$\alpha \in \sigma(T)$ がわかる.

重要な結論：

どの基底 B を使って q_T を定めても，同一の多項式を得る.

もちろん，この結論を示すには，

$$q_T^{(1)} \cdots q_T^{(m)} = q_T^{(\pi_1)} \cdots q_T^{(\pi_m)}$$

という事実を用いる (π は任意の順列).

したがって，拡張した q_T の妥当性は確認済み.

重複度の空白を埋めるべく 4

そもそも q_T を拡張しようとしたのは，$\mathbb{R}$ 上の重複度の利論的な空白を埋めるためである．

Defn. 固有対 (a, b) の**重複度 (multiplicity)** を次のように定める．

$$\tilde{d} := \frac{\dim \operatorname{null}(T^2 + aT + bI)^{\dim U}}{2}.$$

(*) したがって，固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ と固有対 $(a_1, b_1), \ldots, (a_M, b_M)$ をもつ $T \in \mathcal{L}(U)$ について，

$$\dim U = \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{j=1}^{M} 2\tilde{d}_j$$

という嬉しい結果が得られる． なお，$0 \leq m, M \leq \dim U$ で $\max\{m, M\} > 0$.

不変部分空間の凱旋：構造をめぐる更なる知見

この議論をまとめるため，なかなか良い結果を紹介する．前の表記を踏襲して，

$$\begin{aligned} U_i &:= \mathrm{null}(T - \alpha_i I)^{\dim U},\ i = 1, \ldots, m \\ \widetilde{U}_j &:= \mathrm{null}(T^2 + a_j T + b_j I)^{\dim U},\ j = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

(**) $\mathbb{R}$ 上の U について，

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus \widetilde{U}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{U}_M$$

と分解でき，また各 $U_i, \widetilde{U}_j$ は間違いなく T-不変部分空間である．

T 固有の不変量 1

$\mathbb{F}$ 上，$\dim U = n$ として $T \in \mathcal{L}(U)$ を考える．特性多項式を展開して

$$q_T(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

と表すと，特に c_{n-1} と c_0 が単純な形を取る．

$$\begin{aligned} c_0 &= (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_m b_1 \cdots b_M \\ c_{n-1} &= (-1)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m - a_1 - \cdots - a_M) \end{aligned}$$

ここに線型作用素 T そのもののの**トレース (trace)** と**行列式 (determinant)** が自ずと現れる．

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} T &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_m - a_1 - \cdots - a_M \\ \det T &:= \alpha_1 \cdots \alpha_m b_1 \cdots b_M. \end{aligned}$$

これらを作用素版の量ととらえると，その行列版と一致することが幸甚.

T 固有の不変量 2

(**) 素晴らしい事実として，任意の基底 B に対して，

$$\operatorname{trace} T = \operatorname{trace} M(T; B)$$
$$\det T = \det M(T; B)$$

という等式が成立して，我々が安心．さらに，ここでの特性多項式はめでたく古典の定義と一致する．

$$q_T(z) = \det(zI - T).$$

これらの結果を示すことはさほど難しくない．Axler (1997, Ch. 10) を参照．

スパースな表現を求めて

最後に残っている「やや奥深い疑問」を思い出そう．

「三角化」と「対角化」の中間に位置する概念はあるか？

幸いにも，ある．また，対角未満でもこれよりスパースな上三角形式はおそらく望めないだろう．

この概念とは，線型作用素 T の標準形 (canonical form) であり，ここで代表的なジョルダン標準形 (Jordan form) に着目．複素線型空間ならば任意の T について求めることができる．

この結果を証明するための道具は揃っているが，段取りはここでは省略．
Axler (1997, Ch. 8) や Horn and Johnson (1985, Ch. 3) で明解な証明が述べられる．

ジョルダン標準形

(**) $\mathbb{C}$ 上の U で $T \in \mathcal{L}(U)$ を取る．以下の表現行列を成す基底 B_J が存在する．

$$M(T; B_J) = \begin{bmatrix} J_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix}$$

ここで各区分行列 J ($k \times k$, $1 \leq k$) は以下の形をとる．

$$J = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha_k \end{bmatrix}.$$

Defn. このような基底を T の**ジョルダン基底 (Jordan basis)** といい，$M(T; B_J)$ を T の**ジョルダン標準形 (Jordan form)** という．

明らかに，任意の複素行列はジョルダン標準形の行列と相似である．

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. やや入り組んだ話題

講義内容

1. 不変部分空間と固有値，固有ベクトル
2. 議論を導く疑問，理論の礎をなす結果
3. やや入り組んだ話題

References

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2nd edition.

Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1st edition.