線型代数集中講義
第四回

Matthew J. Holland

matthew-h@is.naist.jp

Mathematical Informatics Lab
Graduate School of Information Science, NAIST

Some useful references

- Finite dimensional inner-product spaces, normal operators: Axler (1997, Ch. 6-7)
- Projection theorem on infinite-dimensional Hilbert spaces: Luenberger (1968, Ch. 3)
- Unitary matrices: Horn and Johnson (1985, Ch. 2)

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

基本的な発想：幾何の直感を抽象化・一般化

これまでの進捗は以下のとおり：

- 線型性をもつ**集合**を扱うフレームワークを構築
- 線型性をもつ**関数**を扱うフレームワークを構築
- この枠組みにおいて有名かつ重要な結果を紹介

これまでの議論は相当抽象的であった (例：関数空間など容易に扱える).

この枠組みに「長さ」と「角度」の概念は加えられるか？

容易にできる．その鍵となるのは 2 つのベクトルの「内積」にほかならない.

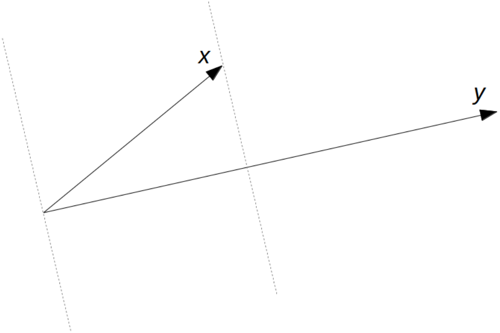
$\mathbb{R}^3$ のベクトル解析という初歩から 1

普段，高校物理などで最初は「射影」が長さによって表される．

すなわち $\mathrm{proj}(x; y) \in \mathbb{R}^3$ で y 方向への x の射影を表すと，その長さが

$$\|\mathrm{proj}(x; y)\| = \|x\| |\cos(\angle xy)|$$

を満たすように定める．斜辺の長さが $\|x\|$ となる直角三角を考えるとごく自然．



$\mathbb{R}^3$ のベクトル解析という初歩から 2

射影自体 (ベクトル) を定めるには，y の適切な定数倍を取れば良い．すなわち，

$$\mathrm{proj}(x; y) := \frac{\|x\| \cos(\angle xy)}{\|y\|} y.$$

明らかなように，一般には引数に対して対称性をもたない．

2 つのベクトル $x, y \in \mathbb{R}^3$ の向きを語る上で有用なのは以下の「スカラー積」，

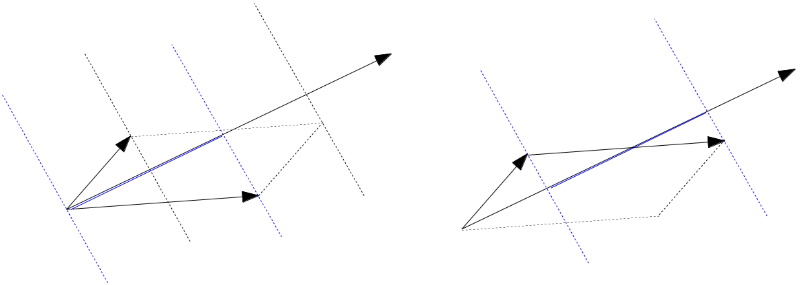
$$x \cdot y := \|x\| \|y\| \cos(\angle xy).$$

$x \cdot y = y \cdot x$ と対称性を有する．さらに，

$$\begin{aligned} x \perp y &\iff x \cdot y = 0 \\ \angle xy \text{ 鋭角} &\iff x \cdot y > 0 \\ \angle xy \text{ 鈍角} &\iff x \cdot y < 0. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ のベクトル解析という初歩から 3

スカラー積の線型性，つまり $(x+z)\cdot y=(x\cdot y)+(y\cdot y)$ が妥当であることは幾何学的に容易に確認できる．



すると直交座標ベクトルを $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ と表せば

$$
\begin{aligned}
x\cdot y &= (x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)\cdot(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3)\\
&= x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3
\end{aligned}
$$

と得る．ここで $x_i := \|x\|\cos(\angle xe_i)$ で，y_j についても同様．

一般化したスカラー積としての内積 1

幾何学は以上で，ここからは代数的な話である．
スカラー積 $x \cdot y$ で長さと角度の概念を捕獲．一般化しよう．

まず，$x, y \in \mathbb{R}^n$ ならば，以下の定義拡張は自然であろう．

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

複素数の場合はどうか？ $u = a + ib \in \mathbb{C}$ ならば，$\mathbb{R}^2$ と同様な扱い，つまり

$$\|u\| := \sqrt{a^2 + b^2} = (u\bar{u})^{1/2} = \sqrt{|u|^2}.$$

これを $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ へと拡張すると，

$$\|u\| := \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}.$$

これで $\|u\|^2 = u_1\bar{u}_1 + \cdots + u_n\bar{u}_n$ となるので，以下のような定義も直感的な魅力をもつ．

$$u \cdot v := u_1\bar{v}_1 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

一般化したスカラー積としての内積 2

(*) 先ほど紹介した二つの一般化スカラー積 ($\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{C}^n$) が以下の性質をもつ：

- 共役対称性，$\overline{v \cdot u} = u \cdot v$
- 定値性，$u \cdot u = 0 \iff u = 0$
- 線型性 (一つ目の引数)$(\alpha u + \beta u') \cdot v = \alpha(u \cdot v) + \beta(u' \cdot v)$

上記の性質はすべて古典的なスカラー積と共通していることがポイント.

線型代数では，内積の性質を公理として定めてから出発する.

以下，ぎこちないドット記号をやめ，普通の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積記号として用いる.

内積

体 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上の線型空間 V について考える.

Defn. 任意の $u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ について以下を満たす写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ を V 上の**内積 (inner product)** という.

IP.1 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

IP.2 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

IP.3 $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$

IP.4 $\langle u, u \rangle \geq 0$, and $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

(*) 加法性は実はどの引数でも成り立つ. また, 任意の $v \in V$ を取って, $\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$ と $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$ が成り立つ.

Defn. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を**内積空間 (inner product space)** という. 適切な計量の下で完備性を持つ内積空間を**ヒルベルト空間 (Hilbert space)** という.

内積の事例

(*) 先ほど定義した $\mathbb{R}^n$ 版と $\mathbb{C}^n$ 版の一般化スカラー積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を合わせると適当な内積空間になる.

(*) 線型空間 $\mathcal{P}_m()$ において

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

と定めると，適当な内積空間になる.

(**) 実数列の空間,

$$\ell_p := \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

を思い出して，ヘルダーの不等式を用いて有限性を示すと,

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

が ℓ_2 の適当な内積であることが確認できる.

内積の性質 1

Defn. 内積空間 V で，$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ を V 上の***ノルム* (norm)** という．

この名付けの妥当性をまず確認しよう．

(*) [コーシー=シュワルツ] 内積空間 V において，

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$$

$0 \leq \langle u - \alpha v, u - \alpha v\rangle$ と展開して α を適切に取るとすぐに確認できる．

(*) 後は三角不等式を確かめるのみ． $\|u + v\|^2$ を展開して C-S 不等式を使うと，

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$$

上記のノルムが以前紹介したノルムのその他の性質を満たすことも確認すること．

内積の性質 2

(*) 先ほどの結果を踏まえて「平行四辺形の法則」の一般化もすぐに確認できる.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Defn. $\langle u, v\rangle = 0$ ならば，u と v が**直交する (orthogonal)** といい，$u \perp v$ と記す．また，$W \subset V$ についても同様に，$u \perp W$ iff $u \perp w, \forall\, w \in W$.

(*) ピタゴラスの定理も同様に一般化される.

$$u \perp v \implies \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

(*) $u \perp v, \forall\, v \in V$ ならば，$u = 0$.

(*) 都合の良い事実：内積は連続性をもつ．すなわち，V の列 $(u_n), (v_n)$ がそれぞれ $u_n \to u$，$v_n \to v$ と収束するとき，

$$\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle.$$

講義内容

1. <u>内積をめぐる基本的な概念</u>
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

講義内容

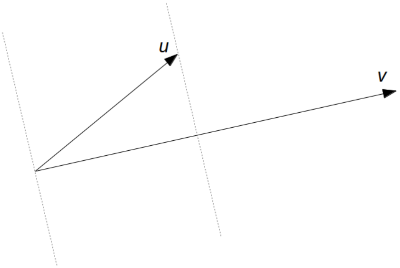
1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

射影の概念をここで再考

これまでは proj$(u; v)$ を幾何学的にしか触れてこなかった.
道具がそろった今, 代数的な議論はスムーズに進む. 直感的には, 以下を満たす $\alpha v \in [\{v\}]$ が欲しい.

$$u = \alpha v + w, \text{ where } w \perp v.$$

(*) 上記を満たすスカラーが $\alpha = \langle u, v\rangle / \|v\|^2$ という思い出深い形式を取る.



後ほど丁寧に記述するこの「直交射影」は大変有用な概念.

或る最適化問題

以下の問題について考えよう．
内積空間 V，部分空間 $X \subset V$ をおく．$u_0 \in V$ を固定し，

$$x \text{ について } \|x - u_0\| \text{ を最小化する } \widehat{x} \in X \text{ を探せ.}$$

自然と思い浮かぶ問いかけ：

解は存在するか？　唯一つ存在するか？　明示的に解を表せるか？

いわゆる「射影定理」がこれらの問いに答えてくれる素晴らしい古典的な結果.

注意：$\dim V < \infty$ の仮定はこれまで必要としていない.

射影定理

(*) Say is s.t. for all 任意の $x \in X$ に対して，$\widehat{x} \in X$ が $\|\widehat{x} - u_0\| \leq \|x - u_0\|$ を満たすとする．このとき，$\widehat{x}$ すなわち X 内の距離最小化ベクトルは唯一つ存在する．

(*) $\widehat{x}$ が $\|x - u_0\|$ を最小化する $\iff$ $\widehat{x} - u_0 \perp X$.

あとはこのような元の存在条件を示すのみ．そうするには条件を少しだけ強める必要がある．

(**) V をヒルベルト空間，$X \subset V$ を閉部分空間とする．このとき，任意の $u_0 \in V$ に対して，

$$\exists \widehat{x} \in X, \|\widehat{x} - u_0\| \leq \|x - u_0\|, \forall x \in X.$$

上記の一連の結果はしばしば古典的な射影定理 (Classical Projection Theorem) と呼ばれる．

直交補集合 1

もう少し話を発展させよう．V を内積空間とする．

Defn. 部分集合 $U \subset V$ を取り，

$$U^{\perp} := \{v \in V : u \perp v\},$$

と表す U の**直交補集合 (orthogonal complement)** を定める．

(*) $\{0\}^{\perp} = V$ と $V^{\perp} = \{0\}$ は成立．さらに $U^{\perp} \subset V$ は閉の部分空間でもある．

(*) $\dim V = \infty$ を許容しつつ，いくつか確認すべき性質：

- $U \subset U^{\perp\perp}$
- $U \subset W \implies W^{\perp} \subset U^{\perp}$
- $U^{\perp\perp\perp} = U^{\perp}$
- $U^{\perp\perp} = \overline{[U]}$

直交補集合 2

なぜ「補集合」と呼ぶかはここで明らかになる．

(*) ヒルベルト空間 V と閉部分空間 $X \subset V$ を考える．このとき，

$$V = X \oplus X^{\perp}, \text{ および } X^{\perp\perp} = X.$$

射影定理を用いると上記は証明できる．

結果，直交補集合によって立派な直和分解を得る．つまり
$x \in X, x' \in X^{\perp}$ で $v = x + x'$ が一意に決まる．

(*) $\dim V < \infty$ と条件を強めると，ものごとはさらに単純に：

- V は内積空間 $\Longrightarrow$ V はヒルベルト空間 (第一回を思い出そう).
- したがって上記の結果と射影定理自体はあらゆる部分空間に対して成り立つ．
- 同様に，部分空間 $U \subset V$ を取ると $U^{\perp\perp} = U$.
- また $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ という自然な事実も．

正射影 (直交射影) 1

必要な用語と結果の準備ができたので，一般的な射影概念をここで紹介する．

Defn. $X \subset V$ が部分集合で，ある $u \in V$ を取る．先ほどの議論により，

$$u = x + x', \quad x \in X, x' \in X^{\perp}$$

は一意に定まる． X への u の**正射影 (orthogonal projection)** を $\mathrm{proj}(u; X) := x' = u - x$ と定義する．

(*) 驚かないだろうが，この正射影が射影定理に登場． 具体的に，

$$\widehat{x} \in X \text{ が } \|x - u_0\| \text{ を最小化} \iff \widehat{x} - u_0 \in X^{\perp}$$

がわかっているので，$u_0 = (u_0 - \widehat{x}) + \widehat{x}$ により $\widehat{x} = \mathrm{proj}(u; X)$ がわかる．

正射影 (直交射影) 2

(*) ある $x \in V$ を $y \in V$ へと射影することは $\mathrm{proj}(x; [\{y\}])$ を求めるのと同等．この場合，

$$x = \alpha y + w,\ w \perp y.\ \text{したがって}\ \mathrm{proj}(x; [\{y\}]) = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$$

と射影がお馴染みの形式をとる．

正射影の性質

$U \subset V$ を部分空間，また $\dim V < \infty$ とする．ここで
$P_U(v) := \mathrm{proj}(v; U)$ と表す.

(*) 以下は容易に確認できる：

- $P_U \in \mathcal{L}(V)$，線型作用素である.
- $\mathrm{range}\, P_U = U, \mathrm{null}\, P_U = U^\perp$.
- $P_U^2 = P_U$，冪等写像である.
- $\|P_U(v)\| \leq \|v\|, \forall v \in V$, 縮小写像である.

(*) 興味深いことに，最後の 2 点は正射影を特徴づけるのである.
具体的に，$S \in \mathcal{L}(V)$ を取って

$S^2 = S$ および $\|S(v)\| \leq \|v\|, \forall v \in V \implies S = P_U, U$ は部分空間.

直交集合 1

内積空間 V の部分集合 $S \subset V$ を取る．

Defn. あらゆる $u, v \in S$ が直交するとき，S を**直交集合 (orthogonal set)** という．さらに各 $u \in S$ が $\|u\| = 1$ を満たすとき，**正規直交 (orthonormal)** と形容する．

基礎的な概念である独立性は，以下のように直交性と密接な関係にある．

(*) $S \subset V$ が直交ならば，(線型) 独立でもある．

直交集合 2

逆に，独立集合を所与としたとき，以下のように常にそれを「直交化」できる．

(*) 互いに独立の列 $v_1, v_2, \ldots$ に対して，下記を満たす互いに正規直交の列 $e_1, e_2, \ldots$ は存在する．

$$[\{v_1, \ldots, v_n\}] = [\{e_1, \ldots, e_n\}], n > 0 \text{ は任意.}$$

単純なアルゴリズムでこれを証明できる．

$e_1 := v_1/\|v_1\|$ と初期化．以降の元は

$$e_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i$$

という規則により定義．グラハム=シュミットの直交化法と呼ばれる．

(*) したがってどの内積空間にも正規直交の基底が存在する．

直交基底

都合の良い基底として，直交集合は活躍する．

内積空間 V の次元を $\dim V = n$ とおいて，正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を取る．このとき，任意の $v \in V$ について以下が成り立つ．

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$$
$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

ここで有名な結果を確認しよう．

(*) (シューアの定理，1909)．$\mathbb{C}$ 上の有限次元内積空間 V をおいて，任意の $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．このとき，以下を満たす基底 B が存在する．

$$M(T; B) \text{ は上三角で } B \text{ 正規直交である．}$$

上三角表現行列の特徴づけをめぐる結果 (第三回) と前スライドの G-S 直交化法による結果を使うと証明できる．

最適化問題の事例，其の一

First example: find the optimal approximation of sin(x) on [-pi,pi] by a 5th-degree polynomial.

最適化問題の事例，其の二

Second example: Find the closest element in the subspace generated by m vectors to an arbitrary vector.

最適化問題の事例，其の三

Third example: Find the element of an affine set which has the smallest norm (this is of course the distance from any element in that affine set to the associated hyperplane through the origin).

最適化問題の事例，其の四

Fourth example: Minimum distance from an arbitrary element to a convex set.

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

線型汎関数 1

スカラー値を返す線型写像は線型代数のみならず，さまざまな分野で重要な役割を果たす．

Defn. V を $\mathbb{F}$ 上の線型空間とする．このとき，$f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ を**線型汎関数 (linear functional)** という．

(*) 以下の例はいずれも線型汎関数である：

- $\mathbb{F}$ 上の $\mathbb{R}^n$ において，$\alpha \in \mathbb{F}^n$ を固定して $f(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ と定めた写像．実際，どの $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ もこの形式をとる．
- $\mathcal{P}_6(\mathbb{R})$ 上の $f(x) := \int_0^1 x(t) \cos(t)\, dt$.
- $\mathcal{C}[0, 1]$ 上の $f(x) := x(0.5)$.
- ヒルベルト空間 H 上で $\bar{h} \in H$ を固定して $f(x) := \langle x, \bar{h} \rangle$ と定めた写像.

特に最後の事例について，より詳しく見ていこう．

線型汎関数 2

かなり凄い事実：

(*) 内積空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ で $\dim V = n$ とおいて f を線型汎関数とする．このとき，以下を満たす $\bar{v} \in V$ が一意に定まる．

$$f(u) = \langle u, \bar{v}\rangle, \quad \forall\, u \in V.$$

証明は案外簡単．まず V の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を用意し，これを使って任意の u を分解して f の線型性を生かして $f(u)$ の性質を確認すれば良い．

この結果には無限次元版もあり，それはリース=フレシェ (Riesz-Fréchet) の定理という．Luenberger (1968, Ch. 4) などを参照．

線型写像の共役

ここで紹介する概念は以後の議論でも度々出てくる.

Defn. $\mathbb{F}$ 上の内積空間 U, V で $\dim U, \dim V < \infty$ とおく. 任意の $T \in \mathcal{L}(U, V)$ と $v \in V$ を取る. このとき,

$$f(u) := \langle Tu, v \rangle$$

は明らかに $f \in \mathcal{L}(U, \mathbb{F})$ すなわち線型汎関数である. 先ほどの Riesz-Fréchet より, 以下を満たす $u^* \in U$ が一意に定まる.

$$f(u) = \langle u, u^* \rangle, \quad u \in U.$$

T を固定したまま, v は任意なので次のように写像 $T^* : V \to U$ は定義できる.

$$T^*(v) := \text{上記の } u^*.$$

この写像 T^* を T の**共役 (adjoint)** という. やや奥妙だが, 大変重要である.
覚えておくべきポイント：$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$.

共役写像の性質

(*) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$T(x_1, x_2, x_3) := (x_2 + 3x_3, 2x_1)$$

と定め，普通の内積を用いて共役が $T^*(y) = (2y_2, y_1, 3y_1)$ となる．あらゆる $y \in \mathbb{R}^2$ について $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ が成り立つことを使えば確認できる．

(*) 前スライドで紹介した一般的な $T \in \mathcal{L}(U, V)$ について，$T^* \in \mathcal{L}(V, U)$ が成り立つ．

(*) さらに写像 $(\cdot)^*$，つまり $T \mapsto T^*$ の性質を確認せよ．$T, T' \in \mathcal{L}(U, V)$ と $\alpha \in \mathbb{F}$ を固定．

- $(T + T')^* = (T)^* + (T')^*$
- $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}(T)^*$
- $(T^*)^* = T$.
- W が内積空間であれば，$T \in \mathcal{L}(U, V), S \in \mathcal{L}(V, W)$ のとき，$(ST)^* = T^* S^*$ が成立.

さらなる写像共役の性質

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ と $\alpha \in \mathbb{F}$ を取る．このとき，

$$\alpha \in \sigma(T) \iff \bar{\alpha} \in \sigma(T^*).$$

(*) $U \subset V$ を部分空間とし，$T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．このとき，

$$U \text{ が } T\text{-不変} \iff U^\perp \text{が } T^*\text{-不変}.$$

(*) $T \in \mathcal{L}(V, W)$ につて以下が成り立つ．

- T が単射的 $\iff$ T^* が全射的.
- T が全射的 $\iff$ T^* が単射的.

(*) したがって，$T \in \mathcal{L}(V, W)$ を取ると

$$\dim \operatorname{null} T^* = \dim \operatorname{null} T + \dim W - \dim V$$

は容易に確認できる．$\dim \operatorname{range} T^* = \dim \operatorname{range} T$ も同様.

(*) これらの結果により，第二回の際にも触れた G. Strang 先生の「基本定理」の一般化はこれで完了 (行空間・列空間の同次元性はこれで OK).

写像とその共役の深き接点

(*) 内積空間 U, V で任意の $T \in \mathcal{L}(U, V)$ を取る．以下の等式が成り立つ．

- $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$
- $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^\perp$
- $\operatorname{null} T = (\operatorname{range} T^*)^\perp$
- $\operatorname{range} T = (\operatorname{null} T^*)^\perp$

Defn. 行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ の**共役転置 (conjugate transpose)** を $A^* := \overline{A^T} = [\overline{a_{ji}}]$ と表す．

任意の写像の適当な表現行列を使うと，その共役写像の行列表現も容易に得られる：

(*) 有限次元内積空間 U, V で $T \in \mathcal{L}(U, V)$ を取る．B_U, B_V をそれぞれ U と V の正規直交基底とする．このとき，

$$(M(T; B_U, B_V))^* = M(T^*; B_V, B_U).$$

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

内積空間上の線型作用素

これまでの講義の流れを思い出そう.

- 線型空間 (線型性を有する集合)
- 線型写像 (線型性を有する関数)
- 一般の線型空間における線型作用素

今回のこれまでの内容を踏まえると，次に着目する点として自然なのは,

- **内積空間における線型作用素**

この節ではこの辺りをことごとく追求.

自己共役写像

V を有限次元内積空間とし，$T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．

Defn. 線型作用素 T が $T = T^*$ を満たすときに T を**自己共役 (self-adjoint)** もしくは**エルミート (Hermitian)** という．

(*) 普通の基底を用いて以下のように定める $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ を考える．

$$M(T) = \begin{bmatrix} 19 & \gamma \\ 7 & 59 \end{bmatrix}$$

このとき，T が自己共役 $\iff \gamma = 7$.

(*) 同様に，任意の正規直交基底 B を用いると，

$$T = T^* \iff M(T; B) = (M(T; B))^*.$$

これは馴染みのある行列の世界とのありがたい接点.

自己共役写像の性質

(*) $T, S \in \mathcal{L}(V)$ が自己共役ならば，$T + S$ も自己共役.

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ が自己共役ならば，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ を取って αT が自己共役.

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ が自己共役ならば，すべての固有値は実数である (体 $\mathbb{F}$ は $\mathbb{C}$ でも $\mathbb{R}$ でも結構).

(*) もちろん，行列 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ によって定まる $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ については，普通基底による表現行列が A なので，共役関係で A を見れば話が済む.

なかなか良いたとえ
線型作用素のうち自己共役な作用素を，$\mathbb{C}$ の部分集合としての $\mathbb{R}$ に見立てるとおもしろい (写像の共役演算 $(\cdot)^*$ は複素共役演算 $\overline{(\cdot)}$ に相当).

自己共役写像の特徴づけ

注意点：自己共役写像であるための必要十分条件は次節で紹介するが，正確にいうと次の結果の証明にその特徴づけは使われる．

正規作用素

ここで重要な線型作用素の一種に着目する．

Defn. $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．T とその共役写像が可換なとき，

$$\text{すなわち } TT^* = T^*T$$

が成り立つとき，T を**正規 (normal)** という．

(*) 自己共役ならば正規である．

(*) B を正規直交基底とする．T が正規であるためには，$M(T; B)$ と $M(T^*; B)$ の可換性が必要十分である．

(*) 普通の基底を用いて，行列

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

によって定まる $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ は正規だが、自己共役ではない．よって正規作用素の全体はより大きい．

正規作用素の性質

正規作用素は共役と一致するとは限らないが，共通点は多数.

(**) 実際，共役とのノルムが一致することによって正規性が特徴づけられる：

$$T \text{ が正規} \iff \|T(v)\| = \|T^*(v)\|, \quad v \in V.$$

(*) したがって，正規な $T \in \mathcal{L}(V)$ について，

$$\operatorname{null} T = \operatorname{null} T^*.$$

(*) また，それぞれの固有ベクトルも親密．T が正規で $\alpha \in \sigma(T)$ とする．このとき，

$$Tv = \alpha v \text{ ならば } T^*v = \bar{\alpha}v.$$

(*) これより重要な結果が得られる．$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を $T \in \mathcal{L}(V)$ の相異なる固有値とし，固有ベクトルを $v_1, \ldots, v_m$ と表すと，

$$\{v_1, \ldots, v_m\} \text{ が直交である．}$$

これまでは独立性についてしか語れなかったが，直交性も見事に登場.

スペクトル定理 (まず直感的に)

$T \in \mathcal{L}(V)$ を取って $\dim V = n$ のとき，以下を思い出そう．

T が対角化可能である $\iff$ ∃基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}, v_i$が固有ベクトル．

上記を満たすような T は確かに扱いやすいが，一般にはこの基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が直交であるとは限らない．固有ベクトルが互いに直交のときこそ「最高に都合の良い作用素」である．

スペクトル定理とは,「最高に都合の良い作用素」の特徴づけにほかならない．言葉でいうと,

$\mathbb{C}$ 版：

もっとも都合の良い線型作用素と正規作用素が等しい．

$\mathbb{R}$ 版：

もっとも都合の良い線型作用素と自己共役作用素が等しい．

なぜこの結果が有用なのか？
正規直交基底を入手する方法が得られるからである．
(一般には存在の保障しかない)

スペクトル定理

内積空間 V で $\dim V = n$ とし，$T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．

(**) 複素スペクトル定理．$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ とおく．

T が正規 $\iff$ $\exists$ 直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$, すべて固有ベクトル

(**) 実スペクトル定理．$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とおく．

T が自己共役 $\iff$ $\exists$ 直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$, すべて固有ベクトル

上記の結果を証明する道具はそろっているが，労力を要するため
ここでは省略．とはいえ，必ず各自で確認すべき．

ここで得る重要な知見：

固有ベクトルが直交基底をなすのは，もっとも都合の良い作用素のみである．

一般の $\mathbb{F}$ でも，自己共役ならば直交基底により対角化できる．

理解が深まる例題 1

Example. (*) $\mathbb{C}^2$ の普通の基底を使って $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ を

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

で定める．このとき，

$$B = \left\{ \frac{(i, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-i, 1)}{\sqrt{2}} \right\}$$

が正規直交基底であり，また各元が T の固有ベクトルである．期待どおりに $M(T; B)$ は対角である．

理解が深まる例題 2

Example. (*) 先ほどと同様に，$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ を以下の表現行列で定める．

$$M(T) = \begin{bmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

前スライドに列挙した諸性質をここでの B についても確認できる．

$$B' = \left\{ \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}} \right\}.$$

$\mathbb{R}$ の場合について

$\mathbb{R}$ の場合でも，議論を自己共役作用素に限定すると，ものごとが楽になる．

(**) $\mathbb{R}$ で $T \in \mathcal{L}(V)$ が自己共役であるとする．$a^2 < 4b$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ を取る．このとき，

$$T^2 + aT + bI \in \mathcal{L}(V) \text{ は可逆である．}$$

(*) よって T は「固有対」を持たない．第三回の結果を踏まえて，

$$\implies \sigma(T) \neq \emptyset.$$

むろん，実スペクトル定理はすでに紹介しているので，この事実は目新しいものではない．

注意：$\mathbb{R}$ における正規作用素の特徴づけも可能だが，ここでは省略．Axler (1997, Ch. 7) を参照．

強めの条件の下，構造定理がさらに美しく

「都合の良い」線型作用素に着目すると，以前に紹介した構造をめぐる結果はさらに立派になる．具体的に直交部分空間への分解が可能になるのである．

(*) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ならば $T \in \mathcal{L}(V)$ を自己共役とする ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ならば正規でも可)．その相異なる固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ と表す． このとき，

$$V = \operatorname{null}(T - \alpha_1 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{null}(T - \alpha_m I)$$

および $\operatorname{null}(T - \alpha_i I) \perp \operatorname{null}(T - \alpha_j I)$，各 $i \neq j$.

したがって，都合の良い T のスペクトル情報により V の直交分解が得られる．

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

講義内容

自己共役作用素の特徴づけ

実数版：
実スペクトル定理は自己共役作用素を特徴づける．

複素数版：
まだこの議論はしていない．

(**) $\mathbb{C}$ で，ある $T \in \mathcal{L}(V)$ が以下を満たすとする．

$$\langle Tv, v \rangle = 0, \quad \forall v \in V.$$

そのとき，$T = 0$ (T が自己共役ならば $\mathbb{R}$ の場合でも成り立つ)．

(*) これを使うと，$\mathbb{C}$ における $T \in \mathcal{L}(V)$ について，

$$T \text{ が自己共役である} \iff \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R},\ v \in V.$$

つまり，複素自己共役作用素とは，任意の v とその写像 $T(v)$ の内積が実数であるような作用素にほかならない．

特に重要なケース：$v \in V$ に対して $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ となる場合．

正作用素と平方根

内積空間 V を $\dim V < \infty$ とする．

Defn. 自己共役な $T \in \mathcal{L}(V)$ に着目．以下を満たすとき，T を**正 (positive)** という．

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in V.$$

(*) もちろん，$\mathbb{C}$ の場合は自己共役性の条件は冗長である．

(*) 任意の部分空間 $U \subset V$ を取って，射影作用素 $\operatorname{proj}(\cdot; U)$ は正．

Defn. $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．次の等式，

$$S^2 = T,$$

を満たす $S \in \mathcal{L}(V)$ が存在するとき，S を T の**平方根 (square root)** という．

(*) $T(z_1, z_2, z_3) := (z_3, 0, 0)$ と定める $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ の平方根を求めよ．

正作用素の必要十分条件，勢ぞろい

(**) 有限次元 V で $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．以下はすべて同値である．

A T が正，すなわち $T = T^*$ かつ $\langle Tv, v \rangle \geq 0$, $\forall v$.

B $T = T^*$ および T の固有値が非負である．

C $Q^2 = T$ を満たす正の $Q \in \mathcal{L}(V)$ が存在する．

D $R^2 = T$ を満たす自己共役な $R \in \mathcal{L}(V)$ が存在する．

E $S^*S = T$ を満たす $S \in \mathcal{L}(V)$ が存在する．

(**) $T \in \mathcal{L}(V)$ が正のとき，$Q^2 = T$ を満たす $Q \in \mathcal{L}(V)$ は実は一意に定まる．つまり，T の平方根は唯一つ存在し，以降は $\sqrt{T} := Q$ と表記.

これらの結果を踏まえた知見を次に整理する．

正作用素の基本的な性質

(*) 昨スライドの結果により，

- 正の平方根をもつのは，正の作用素だけである．
- ある作用素の平方根が正ならば，平方根は一つしかない．
- 正の作用素の全体は自己共役作用素の全体の部分集合である．
- 正作用素の固有値は実数である上に，正である．
- 任意の $S \in \mathcal{L}(V)$ について，S^*S は正である．
- S が正もしくは自己共役ならば，S^2 は正である．である．

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ を正とする．以下は確認できる．

$$T \text{ は可逆である} \iff \langle Tv, v \rangle > 0, \forall v \neq 0.$$

合同変換

ノルムを保持する作用素も着目すべきであろう.

Defn. 以下を満たす $T \in \mathcal{L}(V)$ を**合同変換 (isometry)** という.

$$\|Tv\| = \|v\|, \forall\, v \in V.$$

この呼び名は一般的で，ケース分けをすると別の用語がある：

- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ の場合，T を**ユニタリ (unitary)** という.
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ の場合，T を**直交 (orthogonal)** という.

(*) $\beta \in \mathbb{F}$ が $|\beta| = 1$ とする．このとき，$T := \beta I$ は合同変換である.

(*) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の正規直交基底とする．$T \in \mathcal{L}(V)$ を

$$T(v_i) := \beta_i v_i$$

で定める．ただし $|\beta_i| = 1, i = 1, \ldots, n$. このとき，$T$ は正である.

(*) $V = \mathbb{R}^2$ における反時計回りは合同変換である.

合同変換の便利な性質

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ が合同変換ならば，T^{-1} は存在する.

(**) $T \in \mathcal{L}(V)$ として，以下はすべて同値である.

- A T は合同変換である.
- B $u, v \in V$ に対して $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ (内積を保持).
- C $T^*T = I$
- D 任意の正規直交集合 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ について，写像された $\{Te_1, \ldots, Te_m\}$ も正規直交 ($0 < m \leq n$).
- E $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ が正規直交となるような基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は存在する.
- F T^* は合同変換である.

これらの特徴づけを踏まえて，合同変換をめぐる嬉しい知見がいくつも得られる.

合同変換をめぐる種々の知見

以下の事実はまず確認すべきであろう．

(*) T が合同変換ならば，$T^{-1} = T^*$ が成り立つ．

(*) T がノルムを保持する $\iff$ T が内積を保持する．

(*) 合同変換はすべて正規である．

(*) 次は立派な同値関係を確認．$E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ を $\mathbb{F}$ 上の V の正規直交基底とする．このとき，

T が合同変換である $\iff$ $M(T;E)$ の列が互いに直交する

確認するには，まず **A** $\implies$ **D** を使って $\implies$ 方向を証明．次は **E** $\implies$ **A** で $\impliedby$ 方向を証明する．

(*) **A** $\iff$ **F** より，$M(T;E)$ の列でなく行を使った同様な特徴づけができる．

具体性ある合同変換の特徴づけ

先ほどの合同変換の種々の特徴づけはかなり抽象的であったため，もう少し具体性を加えて議論を進めよう．

複素数の場合：
(*) 体を $\mathbb{C}$ として $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．T が合同変換であるためには，以下は必要十分である．

T の固有ベクトル v_i からなる正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が存在し，なおかつ固有値が $|\alpha_i| = 1$ を満たす．

実数の場合：
第三回と似たような話になる．複素のケースよりやや入り組んだものなので省略．Axler (1997, Ch. 7) を参照．

実対称行列の話

特に確率統計の世界では，実数値を要素とする対称行列が度々出てくる．

これまでの議論を踏まえて「$\mathbb{R}$ だと都合が悪い」と思われても仕方がない．しかし，なぜ実対称行列が喜ばれるのか？

その答えは簡単．$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を対称とする．このとき，

- $T(x) := Ax$ によって定まる $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ は自己共役である．
- T は正規である．
- T は固有値を持ち，また $\mathbb{R}^n$ では，T の固有ベクトル $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が正規直交基底をなす．
- T はこの $\{v_1, \ldots, v_n\}$ により対角化できる．
- 特に，もとの行列 A は基底変換行列 $[v_1 \cdots v_n]$ によって対角化できる．

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. <u>いくつか有名な行列分解</u>

いくつか有名な行列分解

これまでの議論を経て，よく知られている分解の条件について述べていく：

- シューア
- 極
- 特異値
- スペクトル (固有)

線型写像を重視した議論してきたが，ここでときとして，少し特化して「行列の言葉」を使う．

学部レベルの行列界隈の諸結果が如何に簡単に得られるか見て，これまでの結果の力を実感してもらうためである．

シューア分解

たとえば Magnus and Neudecker (1999) を参照.

(*) A を $n \times n$ の複素行列とする．このとき，以下を満たすユニタリ行列 R が存在する.

$$R^* A R = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

ここで α_i が A の固有値である.

確かめるには：
実に簡単．$T(z) := Az$ とおくと，これが正規直交基底の
$E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ により上三角化できることは既知．基底変換行列 (上記の R に相当) はこれらの v_i で作れば良い.

極分解．まず，立派なたとえの再訪

すでに触れた発想だが，$\mathbb{C}$ と $\mathcal{L}(V)$ の類似性は高い：

$$z \in \mathbb{C} \cdots T \in \mathcal{L}(V)$$
$$\bar{z} \in \mathbb{C} \cdots T^* \in \mathcal{L}(V)$$
$$z = \bar{z}, \text{ i.e. } \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \cdots T = T^*, \text{ i.e. } \{\text{ 自己共役作用素 }\} \subset \mathcal{L}(V)$$
$$x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \cdots \{\text{ 正作用素の全体 }\} \subset \{\text{ 自己共役作用素の全体 }\}$$
$$\text{単位円 } \{z : z\bar{z} = 1\} \cdots \text{ 合同変換の全体}, \{T : T^*T = I\}$$

$z \in \mathbb{C}$ は以下のように記述できる．

$$z = \left(\frac{z}{|z|}\right)\sqrt{z\bar{z}}, \text{ 当然 } z/|z| \text{ は単位円に乗っている．}$$

よって，上記の類推を深めていくと，任意の $T \in \mathcal{L}(V)$ について同様に T を $S\sqrt{T^*T}$ で表せるような合同変換 S が存在するかどうか，気になる．…

極分解

以下の結果のとおり，この類推に駆られた直感は正しい．

(**) (極分解)．L$\mathbb{F}$ 上で $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．このとき，以下が成り立つような合同変換 $S \in \mathcal{L}(V)$ が存在する．

$$T = S\sqrt{T^*T}.$$

この呼称は，$z = e^{\theta i} r, \theta \in [0, 2\pi), r = |z|$ という極形式に由来．
ここで S は ($e^{\theta i}$ と同様に) 長さを変えることなく方向のみ影響する．
一方で (r に相当する)$\sqrt{T^*T}$ によって出力の長さが決まる．

何が嬉しい？　T は一般的でどの線型作用素でも良いが，なんと

$$T = \text{合同変換} \times \text{正作用素}$$

という我々がよく理解している 2 種類の写像に必ず分かれてくれる．

極分解を行列の言葉で

(*) $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ とする．このとき，以下を満たすユニタリ行列 Q と半正定値行列 P が存在する．

$$A = QP.$$

確かめるには：
普通の基底 B を使うと，次のように A によって定まる $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ の表現行列が A そのもので，

$$A = M(T;B) = M(S;B)M(\sqrt{T^*T};B),$$

当然ながら S は合同変換で $\sqrt{T^*T}$ は正である．$M(S;B)$ がユニタリで $M(\sqrt{T^*T};B)$ が半正定値であることは容易に確認できる．
終わり．

(*) また，T を合同変換・正作用素の積に分解するとき，実際，正作用素として $\sqrt{T^*T}$ 以外は存在しない．

線型作用素の特異値

先ほどの議論を振り返って，どの $T \in \mathcal{L}(V)$ についても，正作用素である $\sqrt{T^*T}$ が重要な役割を果たしていることは明らかであろう．理論に限らず応用でも頻繁に登場する．

$\mathbb{F}$ 上で $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．

一般には，T の固有値が実数でないこと，あるいは T が固有値を持たないことなどもありうる．しかし，

$$\sqrt{T^*T} \text{ は必ず非負の実数固有値を持つのである．}$$

Defn. この作用素の固有値，すなわち $s_i \in \sigma(\sqrt{T^*T})$ をもとの T の**特異値 (singular values)** という．

特異値分解 1

(*) $\sigma(\sqrt{T^*T})$ の役割をもう少し具体的に見ていこう．

$\dim V = n$ として $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．$s_1, \ldots, s_n$ で $\sqrt{T^*T}$ の固有値を表す．

スペクトル定理により，$\sqrt{T^*T}$ の固有ベクトルを使って作った $\{b_1, \ldots, b_n\}$ が V の正規直交基底となる．$v \in V$ を取って，

$$v = \langle v, b_1\rangle b_1 + \cdots + \langle v, b_n\rangle b_n$$

となる．ここで極分解により，$T = S\sqrt{T^*T}$ と得て，さらに

$$\begin{aligned} Tv &= S\sqrt{T^*T}v \\ &= \langle v, b_1\rangle s_1 Sb_1 + \cdots + \langle v, b_n\rangle s_n Sb_n, \end{aligned}$$

となる．S は合同変換なので $\{Sb_1, \ldots, Sb_n\}$ が V の正規直交基底となる．

特異値分解 2

(*) この便利な分解を踏まえて，$B_1 := \{b_1, \ldots, b_n\}$ および $B_2 := \{Sb_1, \ldots, Sb_n\}$ と表記した基底について，

$$M(T; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}$$

が成り立つことは容易に確認できる．珍しく相異なる基底を使った表現行列の出現.

$\sqrt{T^*T}$ を明示的に得ることが困難な場合もあるので，固定した基底 B について，以下を満たす対角化行列 G は当然存在する．

$$GM(\sqrt{T^*T}; B)G^* = M(T; B_1, B_2)$$

明らかに $M(T; B_1, B_2)^2 = GM(T^*T; B)G^*$．よって，

$$\sigma(T^*T) = \{s_1^2, \ldots, s_n^2\}.$$

T^*T も正で，この作用素の固有値を求めることは比較的に易しい．その固有値の平方根を取れば良い.

正方行列の言葉で特異値分解を再考

(**) (行列の特異値分解). $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ を考える．A は以下のように

$$A = QDR^*$$

と分解できる。Q, R はユニタリ行列で，D は A の特異値を対角成分とする対角行列である．

確かめるには：
$T(z) := Az$ と定義し，極分解により $T = S\sqrt{T^*T}$ を得る．B を普通の基底とおいて，

$$\begin{aligned} A = M(T; B) &= M(S; B)M(\sqrt{T^*T}; B) \\ &= M(S; B)GDG^*, \end{aligned}$$

と展開できる．ここで $G = M(I; E, B)$ で，$E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ は $\sqrt{T^*T}$ を対角化する正規直交基底であり，$\sqrt{T^*T}v_i = s_i$ が成立.

G が互いに直交する列を有する．これは G のユニタリ性と同値である．また $R^* := G^* = G^{-1}$．さらに $Q := M(S; B)G$ のユニタリ性は $M(S; B)$ と G のユニタリ性から導かれる．

特異値分解の諸性質

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ を取って，その特異値を $s_1, \dots, s_n$ と表す．このとき，

$$T\text{ が可逆である} \iff s_i \neq 0, i = 1, \dots, n.$$

(*) $T \in \mathcal{L}(V)$ を取る．このとき，

$$\dim \operatorname{range} T = |\{s \in \sigma(\sqrt{T^*T}) : s \neq 0\}|.$$

(*) $S \in \mathcal{L}(V)$ を取って，その特異値を $s_1, \dots, s_n$ と表す．このとき，

$$S\text{ が合同変換である} \iff s_i = 1, i = 1, \dots, n.$$

(*) s_* と s^* でそれぞれ $T \in \mathcal{L}(V)$ の最小・最大の特異値を表す．こんとき，

$$s_*\|v\| \leq \|Tv\| \leq s^*\|v\|, \text{任意の } v \in V.$$

一般の線型写像の特異値

線型作用素に限らず，一般の線型写像についても同様な議論ができる．

(*) まず，有限次元内積空間 U, V をおいて $T \in \mathcal{L}(U, V)$ を取ると，

$$T^*T \in \mathcal{L}(U), \quad (T^*T)^* = T^*T$$

が容易に確認でき，よって T^*T は自己共役である．さらに $u \in U$ を取ると

$$\langle T^*Tu, u\rangle = \langle T^*(Tu), u\rangle = \langle Tu, Tu\rangle \geq 0,$$

すなわち期待どおりに T^*T は正である．

よって $T \in \mathcal{L}(U, V)$ はの特異値は $\sigma(\sqrt{T^*T})$ を使って前と同様に定義できる．

一般的な特異値分解の詳細については Horn and Johnson (1985, Ch. 7) を参照.

スペクトル(固有)分解

$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ を自己共役とする．このとき，A を次にように表せる．

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i v_i^T ,$$

ここでの α_i は A の固有値で，v_i はその正規直交固有ベクトルである．

確かめるには：
$T(z) := Az$ と定めると，T が自己共役なため，その固有値は正規直交基底 $E := \{v_1, \ldots, v_n\}$ をなす．B を普通の基底とすると，

$$A = M(T;B) = M(I;E,B)DM(I;B,E),$$

と得て，ここでの D は固有値 α_i を対角成分に持つ対角行列で，
また $M(I;E,B) = [v_1 \cdots v_n]$．行列の掛け算さえすれば終わり．

その他，有名な分解

ここで触れてこなかった残りの著名な行列分解は普段，アルゴリズム型の証明により得られる．たとえば,

QR 分解
任意の $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ について，$A = QR$ と表せて，$Q \in \mathbb{F}^{m\times n}$ が正規直交な列を持ち，$R \in \mathbb{F}^{n\times n}$ が上三角である．

コレスキー分解
正定値行列 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ならば，$A = LL^*$ と表せて，L が下三角で非負の対角成分を持つ．正定値正により $A = S^*S$ と表せる S が存在．普通は QR 分解の結果を S に適用してコレスキー分解を得る．

上記のいずれも Horn and Johnson (1985, Ch. 2) で丁寧に扱われる．

有名な LU 分解については，細かい技術的な点が多く，ここでは省略．興味があれば Horn and Johnson (1985, Ch. 3) を参照．

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. <u>いくつか有名な行列分解</u>

講義内容

1. 内積をめぐる基本的な概念
2. 射影と直交補集合，その界隈
3. 線型汎関数と写像の共役
4. 正規写像とスペクトル定理
5. 正値写像と合同変換
6. いくつか有名な行列分解

References

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2nd edition.

Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1st edition.

Luenberger, D. G. (1968). *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley.

Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1999). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. Wiley, 3rd edition.